Белорусский государственный технологический университет

Кафедра Программной инженерии

**“Математическое программирование”**

**Отчет по лабораторной работе №7**

**Решение транспортной задачи**

**Вариант 7**

Выполнила: Керезь Е.В.

ФИТ 2 курс, 4 группа

Проверила Харланович А. В.

Минск 2020

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** Приобретение навыков решения открытой транспортной задачи.

Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители  Поставщики | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 19 | 9 | 13 | 10 | 18 | 8 | 175 |
| A2 | 17 | 7 | 15 | 12 | 14 | 20 | 120 |
| A3 | 8 | 12 | 18 | 15 | 9 | 18 | 157 |
| A4 | 11 | 17 | 17 | 10 | 20 | 9 | 166 |
| A5 | 10 | 18 | 16 | 7 | 17 | 11 | 107 |
| Потребности | 150 | 114 | 138 | 200 | 102 | 170 |  |

Проверяем необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

∑A = 175 + 120 + 157 + 166 + 107 = 725  
∑B = 150 + 114 + 138 + 200 + 102 + 170 = 874

Суммарная потребность товара у потребителей превышает запасы товара у поставщиков. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительную базу с запасом груза, равным 149 (725—874). Тарифы перевозки единицы товара от поставщика всем покупателям считаем равными нулю.

Заносим исходные данные в распределительную таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители  Поставщики | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 19 | 9 | 13 | 10 | 18 | 8 | 175 |
| A2 | 17 | 7 | 15 | 12 | 14 | 20 | 120 |
| A3 | 8 | 12 | 18 | 15 | 9 | 18 | 157 |
| A4 | 11 | 17 | 17 | 10 | 20 | 9 | 166 |
| A5 | 10 | 18 | 16 | 7 | 17 | 11 | 107 |
| A6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 149 |
| Потребности | 150 | 114 | 138 | 200 | 102 | 170 |  |

Используя метод наименьшей стоимости, построим первый опорный план транспортной задачи.  
Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел ai, или bj.

Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя.

Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.  
Искомый элемент равен c22=7. Для этого элемента запасы равны 120, потребности 114. Поскольку минимальным является 114, то вычитаем его.

x22 = min(120,114) = 114.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 19 | x | 13 | 10 | 18 | 8 | 175 |
| 17 | **7** | 15 | 12 | 14 | 20 | **120 - 114 = 6** |
| 8 | x | 18 | 15 | 9 | 18 | 157 |
| 11 | x | 17 | 10 | 20 | 9 | 166 |
| 10 | x | 16 | 7 | 17 | 11 | 107 |
| 0 | x | 0 | 0 | 0 | 0 | 149 |
| 150 | **114 - 114 = 0** | 138 | 200 | 102 | 170 |  |

Искомый элемент равен c54=7. Для этого элемента запасы равны 107, потребности 200. Поскольку минимальным является 107, то вычитаем его.

x54 = min(107,200) = 107.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 19 | x | 13 | 10 | 18 | 8 | 175 |
| 17 | 7 | 15 | 12 | 14 | 20 | 6 |
| 8 | x | 18 | 15 | 9 | 18 | 157 |
| 11 | x | 17 | 10 | 20 | 9 | 166 |
| x | x | x | **7** | x | x | **107 - 107 = 0** |
| 0 | x | 0 | 0 | 0 | 0 | 149 |
| 150 | 0 | 138 | **200 - 107 = 93** | 102 | 170 |  |

Искомый элемент равен c16=8. Для этого элемента запасы равны 175, потребности 170. Поскольку минимальным является 170, то вычитаем его.

x16 = min(175,170) = 170.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 19 | x | 13 | 10 | 18 | **8** | **175 - 170 = 5** |
| 17 | 7 | 15 | 12 | 14 | x | 6 |
| 8 | x | 18 | 15 | 9 | x | 157 |
| 11 | x | 17 | 10 | 20 | x | 166 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| 0 | x | 0 | 0 | 0 | x | 149 |
| 150 | 0 | 138 | 93 | 102 | **170 - 170 = 0** |  |

Искомый элемент равен c31=8. Для этого элемента запасы равны 157, потребности 150. Поскольку минимальным является 150, то вычитаем его.

x31 = min(157,150) = 150.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | 13 | 10 | 18 | 8 | 5 |
| x | 7 | 15 | 12 | 14 | x | 6 |
| **8** | x | 18 | 15 | 9 | x | **157 - 150 = 7** |
| x | x | 17 | 10 | 20 | x | 166 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | 0 | 0 | x | 149 |
| **150 - 150 = 0** | 0 | 138 | 93 | 102 | 0 |  |

Искомый элемент равен c35=9. Для этого элемента запасы равны 7, потребности 102. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.

x35 = min(7,102) = 7.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | 13 | 10 | 18 | 8 | 5 |
| x | 7 | 15 | 12 | 14 | x | 6 |
| 8 | x | x | x | **9** | x | **7 - 7 = 0** |
| x | x | 17 | 10 | 20 | x | 166 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | 0 | 0 | x | 149 |
| 0 | 0 | 138 | 93 | **102 - 7 = 95** | 0 |  |

Искомый элемент равен c14=10. Для этого элемента запасы равны 5, потребности 93. Поскольку минимальным является 5, то вычитаем его.

x14 = min(5,93) = 5.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | **10** | x | 8 | **5 - 5 = 0** |
| x | 7 | 15 | 12 | 14 | x | 6 |
| 8 | x | x | x | 9 | x | 0 |
| x | x | 17 | 10 | 20 | x | 166 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | 0 | 0 | x | 149 |
| 0 | 0 | 138 | **93 - 5 = 88** | 95 | 0 |  |

Искомый элемент равен c44=10. Для этого элемента запасы равны 166, потребности 88. Поскольку минимальным является 88, то вычитаем его.

x44 = min(166,88) = 88.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 10 | x | 8 | 0 |
| x | 7 | 15 | x | 14 | x | 6 |
| 8 | x | x | x | 9 | x | 0 |
| x | x | 17 | **10** | 20 | x | **166 - 88 = 78** |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | 0 | x | 149 |
| 0 | 0 | 138 | **88 - 88 = 0** | 95 | 0 |  |

Искомый элемент равен c25=14. Для этого элемента запасы равны 6, потребности 95. Поскольку минимальным является 6, то вычитаем его.

x25 = min(6,95) = 6.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 10 | x | 8 | 0 |
| x | 7 | x | x | **14** | x | **6 - 6 = 0** |
| 8 | x | x | x | 9 | x | 0 |
| x | x | 17 | 10 | 20 | x | 78 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | 0 | x | 149 |
| 0 | 0 | 138 | 0 | **95 - 6 = 89** | 0 |  |

Искомый элемент равен c43=17. Для этого элемента запасы равны 78, потребности 138. Поскольку минимальным является 78, то вычитаем его.

x43 = min(78,138) = 78.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 10 | x | 8 | 0 |
| x | 7 | x | x | 14 | x | 0 |
| 8 | x | x | x | 9 | x | 0 |
| x | x | **17** | 10 | x | x | **78 - 78 = 0** |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | 0 | x | 149 |
| 0 | 0 | **138 - 78 = 60** | 0 | 89 | 0 |  |

Искомый элемент равен c63=0. Для этого элемента запасы равны 149, потребности 60. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.

x63 = min(149,60) = 60.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 10 | x | 8 | 0 |
| x | 7 | x | x | 14 | x | 0 |
| 8 | x | x | x | 9 | x | 0 |
| x | x | 17 | 10 | x | x | 0 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | **0** | x | 0 | x | **149 - 60 = 89** |
| 0 | 0 | **60 - 60 = 0** | 0 | 89 | 0 |  |

Искомый элемент равен c65=0. Для этого элемента запасы равны 89, потребности 89. Поскольку минимальным является 89, то вычитаем его.

x65 = min(89,89) = 89.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 10 | x | 8 | 0 |
| x | 7 | x | x | 14 | x | 0 |
| 8 | x | x | x | 9 | x | 0 |
| x | x | 17 | 10 | x | x | 0 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | **0** | x | **89 - 89 = 0** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | **89 - 89 = 0** | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители  Поставщики | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 19 | 9 | 13 | 10[5] | 18 | 8[170] | 175 |
| A2 | 17 | 7[114] | 15 | 12 | 14[6] | 20 | 120 |
| A3 | 8[150] | 12 | 18 | 15 | 9[7] | 18 | 157 |
| A4 | 11 | 17 | 17[78] | 10[88] | 20 | 9 | 166 |
| A5 | 10 | 18 | 16 | 7[107] | 17 | 11 | 107 |
| A6 | 0 | 0 | 0[60] | 0 | 0[89] | 0 | 149 |
| Потребности | 150 | 114 | 138 | 200 | 102 | 170 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все товары от поставщиков вывезены, потребность покупателей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 11, а должно быть m + n - 1 = 11. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

F(x) = 10\*5 + 8\*170 + 7\*114 + 14\*6 + 8\*150 + 9\*7 + 17\*78 + 10\*88 + 7\*107 + 0\*60 + 0\*89 = 6510  
Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 10; 0 + v4 = 10; v4 = 10  
u4 + v4 = 10; 10 + u4 = 10; u4 = 0  
u4 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17  
u6 + v3 = 0; 17 + u6 = 0; u6 = -17  
u6 + v5 = 0; -17 + v5 = 0; v5 = 17  
u2 + v5 = 14; 17 + u2 = 14; u2 = -3  
u2 + v2 = 7; -3 + v2 = 7; v2 = 10  
u3 + v5 = 9; 17 + u3 = 9; u3 = -8  
u3 + v1 = 8; -8 + v1 = 8; v1 = 16  
u5 + v4 = 7; 10 + u5 = 7; u5 = -3  
u1 + v6 = 8; 0 + v6 = 8; v6 = 8

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители  Поставщики | v1=16 | v2=10 | v3=17 | v4=10 | v5=17 | v6=8 |
| u1=0 | 19 | 9 | 13 | 10[5] | 18 | 8[170] |
| u2=-3 | 17 | 7[114] | 15 | 12 | 14[6] | 20 |
| u3=-8 | 8[150] | 12 | 18 | 15 | 9[7] | 18 |
| u4=0 | 11 | 17 | 17[78] | 10[88] | 20 | 9 |
| u5=-3 | 10 | 18 | 16 | 7[107] | 17 | 11 |
| u6=-17 | 0 | 0 | 0[60] | 0 | 0[89] | 0 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;2): 0 + 10 > 9; ∆12 = 0 + 10 - 9 = 1 > 0  
(1;3): 0 + 17 > 13; ∆13 = 0 + 17 - 13 = 4 > 0  
(4;1): 0 + 16 > 11; ∆41 = 0 + 16 - 11 = 5 > 0  
(5;1): -3 + 16 > 10; ∆51 = -3 + 16 - 10 = 3 > 0

max(1,4,5,3) = 5

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (4;1): 5  
Для этого в перспективную клетку (4;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Запасы |
| 1 | 19 | 9 | 13 | 10[5] | 18 | 8[170] | 175 |
| 2 | 17 | 7[114] | 15 | 12 | 14[6] | 20 | 120 |
| 3 | 8[150][-] | 12 | 18 | 15 | 9[7][+] | 18 | 157 |
| 4 | 11[+] | 17 | 17[78][-] | 10[88] | 20 | 9 | 166 |
| 5 | 10 | 18 | 16 | 7[107] | 17 | 11 | 107 |
| 6 | 0 | 0 | 0[60][+] | 0 | 0[89][-] | 0 | 149 |
| Потребности | 150 | 114 | 138 | 200 | 102 | 170 |  |

Цикл приведен в таблице (4,1 → 4,3 → 6,3 → 6,5 → 3,5 → 3,1).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (4, 3) = 78. Прибавляем 78 к объемам товаров, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 78 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители  Поставщики | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 19 | 9 | 13 | 10[5] | 18 | 8[170] | 175 |
| A2 | 17 | 7[114] | 15 | 12 | 14[6] | 20 | 120 |
| A3 | 8[72] | 12 | 18 | 15 | 9[85] | 18 | 157 |
| A4 | 11[78] | 17 | 17 | 10[88] | 20 | 9 | 166 |
| A5 | 10 | 18 | 16 | 7[107] | 17 | 11 | 107 |
| A6 | 0 | 0 | 0[138] | 0 | 0[11] | 0 | 149 |
| Потребности | 150 | 114 | 138 | 200 | 102 | 170 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v4 = 10; 0 + v4 = 10; v4 = 10  
u4 + v4 = 10; 10 + u4 = 10; u4 = 0  
u4 + v1 = 11; 0 + v1 = 11; v1 = 11  
u3 + v1 = 8; 11 + u3 = 8; u3 = -3  
u3 + v5 = 9; -3 + v5 = 9; v5 = 12  
u2 + v5 = 14; 12 + u2 = 14; u2 = 2  
u2 + v2 = 7; 2 + v2 = 7; v2 = 5  
u6 + v5 = 0; 12 + u6 = 0; u6 = -12  
u6 + v3 = 0; -12 + v3 = 0; v3 = 12  
u5 + v4 = 7; 10 + u5 = 7; u5 = -3  
u1 + v6 = 8; 0 + v6 = 8; v6 = 8

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=11 | v2=5 | v3=12 | v4=10 | v5=12 | v6=8 |
| u1=0 | 19 | 9 | 13 | 10[5] | 18 | 8[170] |
| u2=2 | 17 | 7[114] | 15 | 12 | 14[6] | 20 |
| u3=-3 | 8[72] | 12 | 18 | 15 | 9[85] | 18 |
| u4=0 | 11[78] | 17 | 17 | 10[88] | 20 | 9 |
| u5=-3 | 10 | 18 | 16 | 7[107] | 17 | 11 |
| u6=-12 | 0 | 0 | 0[138] | 0 | 0[11] | 0 |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.  
Минимальные затраты составят: F(x) = 10\*5 + 8\*170 + 7\*114 + 14\*6 + 8\*72 + 9\*85 + 11\*78 + 10\*88 + 7\*107 + 0\*138 + 0\*11 = 6120

**Анализ оптимального плана**.  
От 1-го поставщика необходимо направить товар 4-ому потребителю (5 ед.), 6-ому потребителю (170 ед.)  
От 2-го поставщика необходимо направить товар 2-ому потребителю (114 ед.), 5-ому потребителю (6 ед.)  
От 3-го поставщика необходимо направить товар 1-ому потребителю (72 ед.), 5-ому потребителю (85 ед.)  
От 4-го поставщика необходимо направить товар 1-ому потребителю (78 ед.), 4-ому потребителю (88 ед.)  
От 5-го поставщика необходимо весь товар направить 4-ому потребителю.  
Потребность 3-го потребителя остается неудовлетворенной на 138 ед.  
Потребность 5-го потребителя остается неудовлетворенной на 11 ед.